www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée 4 heures

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel non nul, par I le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\pi/2$, par $\mathbf{R}$ le corps des réels, par $\mathbf{C}$ celui des complexes, par K l'un ou l'autre de ces deux corps, par $m_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, par I_n la matrice unité d'ordre n. Si $M \in m_n(K)$, on désigne par $\det M$ le déterminant de M et par $m_{k,j}$ $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$ l'élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M ; on écrira alors $M = (m_{k,j})$.

On considère les deux matrices S_n et A_n de $m_n(\mathbf{R})$ définies de la façon suivante :

La matrice $S_n = (s_{k,j})$ est symétrique et telle que

$$s_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } |k-j| = 1 \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice $A_n = (a_{k,j})$ est antisymétrique et telle que

$$a_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } k-j = 1 \\ -1 \text{ si } k-j = -1 \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans toute la suite du problème on désigne par P_n (respectivement Q_n) la fonction polynôme définie sur K à valeurs dans K par :

$$\lambda \longmapsto P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - S_n). \quad \left(\text{resp. } \lambda \longmapsto Q_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n)\right)$$

On note $f_{n,K}$ (resp. $g_{n,K}$) l'endomorphisme du K-espace vectoriel K^n dont la matrice dans la base canonique de K^n est S_n (resp. A_n).

L'objet de ce problème est l'étude des éléments propres de $f_{n,K}$ et de $g_{n,K}$.

PARTIE I Etude du cas $n = 3$

Dans cette partie, on étudie les endomorphismes $f_{3,\mathbf{R}}$, $g_{3,\mathbf{C}}$, $g_{3,\mathbf{R}}$, ainsi que les systèmes différentiels associés

$$(E_{S_3}) \quad X' = S_3 X \qquad \text{et} \qquad (E_{A_3}) \quad X' = A_3 X.$$

On suppose que l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $(0 ; (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3},))$.

I - Expliciter $P_3(\lambda)$, ainsi que les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f_{3,\mathbf{R}}$.

II - Déterminer les applications x, y et z de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ solutions du système différentiel :

$$(E_{S_3}) \begin{cases} x'(t) = \quad y(t) \\ y'(t) = x(t) \quad + z(t) \\ z'(t) = \quad y(t) \end{cases} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}$$

et telles que $x(0) = x_0$ (où x_0 est un réel fixé strictement positif), $y(0) = z(0) = 0$.

Soit Γ_{S_3} l'ensemble des points de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ pour t parcourant $\mathbf{R}$. Montrer que Γ_{S_3} est une courbe plane dont on précisera la nature grâce à un système d'équations dans un repère convenable.

III - Expliciter $Q_3(\lambda)$ ainsi que les valeurs propres et les sous-espaces propres de $g_{3,\mathbf{C}}$ (resp. de $g_{3,\mathbf{R}}$).

IV - On considère le système différentiel :

$$(E_{A_3}) \begin{cases} x'(t) = \quad -y(t) \\ y'(t) = x(t) \quad -z(t) \\ z'(t) = \quad y(t) \end{cases}$$

IV - 1 - Déterminer les applications x, y et z de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ solutions de (E_{A_3}).

IV - 2 - Déterminer les applications x, y, z de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ solutions de (E_{A_3}) et qui vérifient en outre $x(0) = x_0$ (où x_0 est un réel fixé strictement positif), $y\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) = 0$, $z(0) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

Soit Γ_{A_3} l'ensemble des points de R^3 de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ pour t parcourant R. Montrer que Γ_{A_3} est une courbe plane dont on précisera la nature grâce à un système d'équations dans un repère convenable.

PARTIE II Localisation des valeurs propres de $f_{n,R}$

I - Montrer que l'on a, pour tout $\lambda \in R$ et pour tout $n \geq 1$, la relation de récurrence : $P_{n+2}(\lambda) = \lambda P_{n+1}(\lambda) - P_n(\lambda)$.

II - Etudier la parité de l'application de R dans R $\quad \lambda \longmapsto P_n(\lambda)$

III - Calculer $P_n(0)$, $P_n(2)$ et $P_n(-2)$.

IV - Soit H_n la fonction polynôme définie par : $H_n(\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda)$ pour tout $\lambda \in R$. Etablir par récurrence que si λ est un nombre réel fixé de $]-\infty, -2]$, alors $(H_n(\lambda))_{n \in N^*}$ est une suite croissante de nombres réels strictement positifs.

V - (On rappelle que S_n est une matrice symétrique réelle). Montrer que $f_{n,R}$ possède n valeurs propres réelles, toutes contenues dans l'intervalle $]-2, 2[$.

VI - A l'aide d'une calculatrice et à partir de la relation de récurrence établie au I, calculer des valeurs approchées à 10^{-2} près de $P_{10}(\frac{k}{10})$ pour tous les entiers k tels que $1 \leq k \leq 19$; On donnera les résultats dans un tableau.

Les valeurs propres de $f_{10,R}$ sont-elles toutes distinctes ?

PARTIE III Recherche des éléments propres de $f_{n,R}$ et de $g_{n,K}$

On désigne par θ un nombre réel de l'intervalle $]0, \pi[$ et pour tout entier q, tel que $1 \leq q \leq n$, on pose $\alpha_q = \frac{q\pi}{n+1}$.

I - Montrer que $P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$.

II - Déterminer les valeurs propres de $f_{n,R}$ et les exprimer à l'aide des α_q.

III - On considère C^n et C^{n+2} comme C - espaces vectoriels et on désigne par ϕ_θ l'application linéaire de C^{n+2} dans C^n définie par :

$$(Z_0, Z_1, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n, Z_{n+1}) \xrightarrow{\phi_\theta} (T_1, T_2, \ldots, T_j, \ldots, T_n)$$

avec $\quad T_j = Z_{j-1} - 2(\cos\theta) Z_j + Z_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n$.

III - 1 - Déterminer le rang de ϕ_θ et la dimension de son noyau.

III - 2 - Déterminer l'ensemble des $r \in C$ tels que le vecteur $(1, r, \ldots, r^j, \ldots, r^{n+1})$ appartienne au noyau de ϕ_θ.

III - 3 - Montrer que le noyau de ϕ_{α_q} est l'ensemble des vecteurs $(Z_0 \ldots, Z_j, \ldots, Z_{n+1})$ tels que

$$Z_j = a e^{ij\alpha_q} + b e^{-ij\alpha_q}, \qquad (a, b) \in C^2.$$

(Comme précisé dans l'introduction i désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\pi/2$).

Préciser Z_0 et Z_{n+1}.

III - 4 - Déduire de ce qui précède une base de chaque sous-espace propre de $f_{n,R}$ (on en donnera une expression à l'aide des α_q).

IV - Calculer les sommes : $\sum_{s=1}^{n} \cos(2s\alpha_q)$ et $\sum_{s=1}^{n} \sin^2(s\alpha_q)$.

V - On considère la matrice $U = (u_{s,q}) \in m_n(R)$ telle que $u_{s,q} = \sin(s\alpha_q)$.

Montrer que U est inversible et préciser U^{-1} (on rappelle que S_n est symétrique réelle).

VI - Démontrer que pour tout n, il existe une constante $\mu(n)$ (que l'on explicitera) telle que pour tout $\lambda \in C$ on ait :

$$Q_n(\lambda) = \mu(n) P_n(i\lambda)$$

Déterminer les valeurs propres de $g_{n,C}$ et celles de $g_{n,R}$.

VII - En adaptant pour $g_{n,C}$ la méthode utilisée pour $f_{n,R}$, déterminer les sous-espaces propres de $g_{n,C}$ et ceux de $g_{n,R}$.

Fin de l'énoncé

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail